Electricidad y Magnetismo

Sesión 2

1.5 Ley de Ampre

1.6 Potencial Eléctrico

1.7 Campo Eléctrico

1.8 Leyes de Maxwell

Objetivo: Comprender los conceptos de carga y campo. Introducir al estudiante en la relación existente entre electricidad y magnetismo

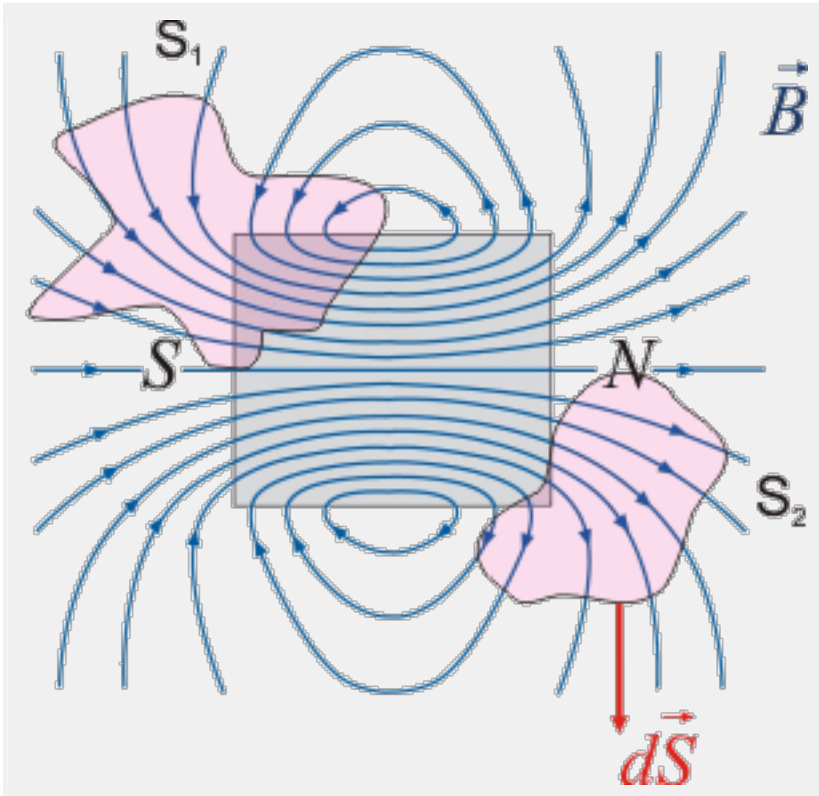
El flujo del campo magnético se define de manera análoga al flujo del campo eléctrico.

Flujo del campo magnético

El flujo del campo magnético Φm a través de una superficie se define:

$$\phi_m = \int_S \vec{B}\, d\vec{s}$$

donde dS es un vector perpendicular a la superficie en cada punto.




Como las líneas del campo magnético son cerradas (no existen monopolos), el flujo a través de cualquier superficie cerrada es nulo:

$$\phi_m = \oint_S \vec{B}\, d\vec{s} = 0$$

Por tanto, al contrario de lo que ocurría con la ley de Gauss, el flujo del campo magnético no puede emplearse para calcular campos magnéticos.

Ley de Ampère

La ley que nos permite calcular campos magnéticos a partir de las corrientes eléctricas es la Ley de Ampère. Fue descubierta por André - Marie Ampère en 1826 y se enuncia:

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0\, I_T$$

La integral del primer miembro es la circulación o integral de línea del campo magnético a lo largo de una trayectoria cerrada, y:

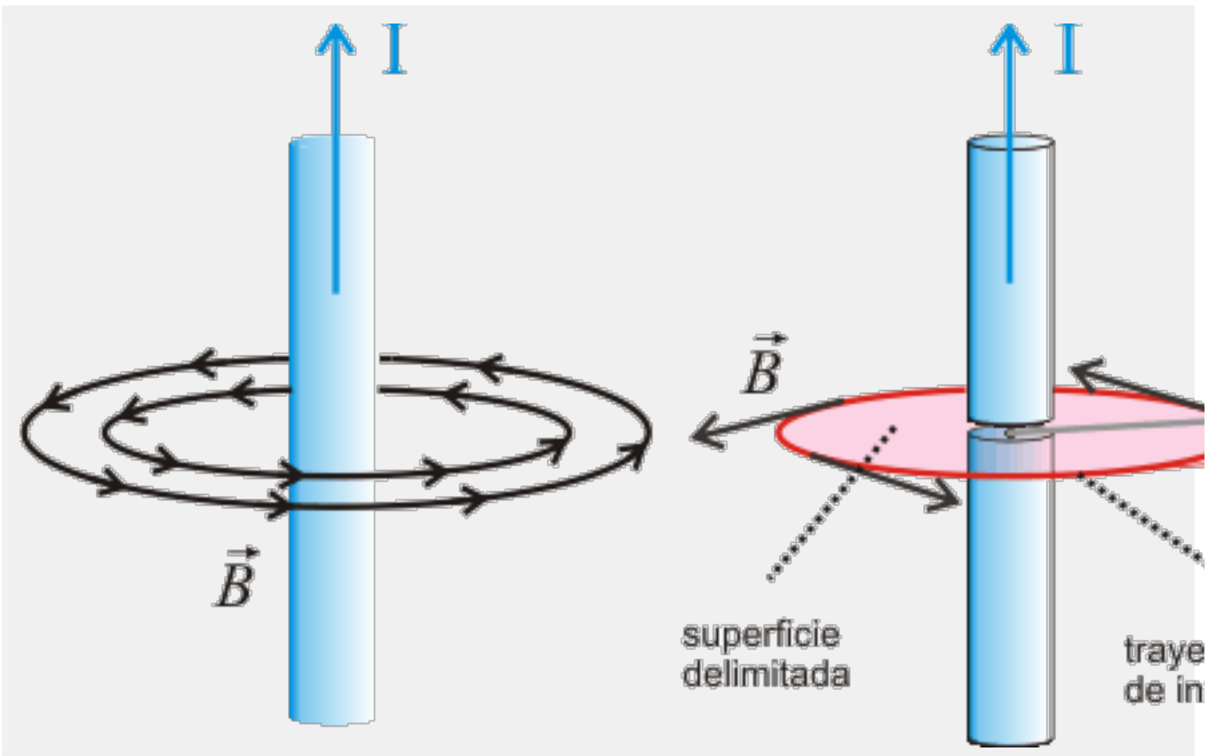
μ0 es la permeabilidad del vacío

dl es un vector tangente a la trayectoria elegida en cada punto

IT es la corriente neta que atraviesa la superficie delimitada por la trayectoria, ysera positiva o negativa según el sentido con el que atraviese a la superficie.

Campo magnético creado por un hilo infinito

Como aplicación de la ley de Ampère, a continuación se calcula el campo creado por un hilo infinito por el que circula una corriente I a una distancia r del mismo.Las líneas del campo magnético tendrán el sentido dado por la regla de la mano derecha para la expresión general del campo creado por una corriente, por lo que sus líneas de campo serán circunferencias centradas en el hilo, como se muestra en la parte izquierda de la siguiente figura.

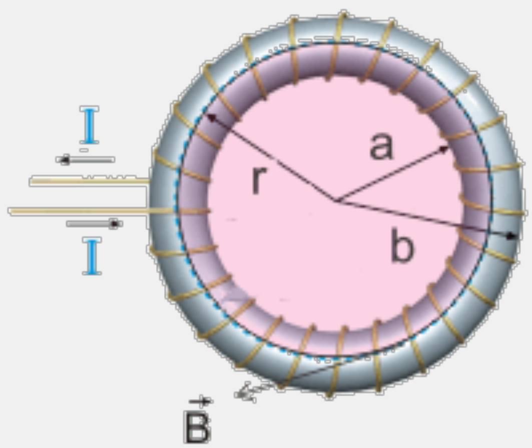
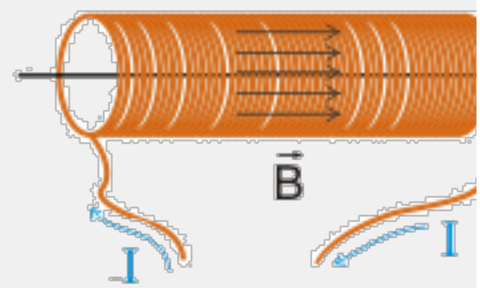



Para aplicar la ley de Ampère se utiliza por tanto una circunferencia centrada en el hilo de radio r. Los vectores y dl son paralelos en todos los puntos de la misma, y el módulo del campo es el mismo en todos los puntos de la trayectoria. La integral de línea queda:

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 I_T \Rightarrow \oint B\, dl = B \oint dl = B\, 2\pi$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Empleando la ley de Ampère puede calcularse el campo creado por distintos tipos de corriente. Dos ejemplos clásicos son el del toroide circular y el del solenoide ideal (*), cuyos campos se muestran en la siguiente tabla.

| Toroide circular | Solenoide ideal* |
|---|---|
|   |   |
| $r < a \;\; y \;\; r > b \Rightarrow B = 0$ <br> $a < r < b \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$ | $B = \mu_0 \, n I$ |

(*) Un solenoide ideal es una bobina de longitud grande cuyas espiras están muy juntas. En la expresión del campo magnético que crea, n es el número de espiras por unidad de longitud.

Ecuaciones de Maxwell

Barbol

---

1 Forma de las ecuaciones

Las Ecuaciones de Maxwell surgen de la teoría electromagnética y son el resumen esta teoría desde un punto de vista macroscópico. Esas ecuaciones tienen la forma más general:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \ ,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ ,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \ ,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial D}{\partial t} \ .$$

Y son, por tanto, un total de ocho ecuaciones escalares (tres para cada uno de los rotacionales de los campos eléctrico y magnético y una para las divergencias).

2 Parámetros presentes

Los parámetros que intervienen en la formulación de las ecuaciones de Maxwell son los siguientes:

$\vec{E}$ - Campo eléctrico existente en el espacio, creado por las cargas.

$\vec{D}$ - Campo dieléctrico que resume los efectos eléctricos de la materia.

$\vec{B}$ - Campo magnético existente en el espacio, creado por las corrientes.

$\vec{H}$ - Campo magnético que resume los efectos magnéticos de la materia.

$\rho$ - Densidad de cargas existentes en el espacio.

$\vec{J}$ - Densidad de corriente, mide el flujo de cargas por unidad de tiempo y superfície y es igual a $\vec{J} = \rho\vec{v}$.

$\varepsilon$ - Permitividad eléctrica, característica de los materiales dieléctricos.

$\mu$ - Permeabilidad magnética, característica de los materiales paramagnéticos.

3 Significado físico

Cuando Maxwell resumió la teoría electromagnética de su época en sus ecuaciones escribió las siguientes ecuaciones:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon},$$

que no es nada más que la ley de Gauss, que se reduce a la ley de Coulomb para cargas puntuales.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

que no tiene nombre y expresa la inexistencia de monopolos magnéticos en la naturaleza, es decir, esta es la explicación de que al romper un imán obtengamos dos imanes, y no dos medio-imanes.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

que es la expresión diferencial de la ley de Faraday.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J},$$

que es la ley de Ampère. Sin embargo encontró que esta última ecuación, juntamente con la ley de Faraday conducían a un resultado que violaba el principio de conservación de la carga, con lo cual decidió modificarla para que no violase este principio dándole la forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

que ahora se conoce como ley de Ampère modificada. El término introducido recibe el nombre de corriente de desplazamiento.

Sin embargo estas ocho ecuaciones no son suficientes para resumir todo el conocimiento de la electrodinámica clásica, nos hace falta una ecuación más, esa es la expresión de la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

## 4 Soluciones de las ecuaciones

### 4.1 Las ecuaciones en función de dos campos

En ocasiones es conveniente expresar esas ecuaciones en función de sólo dos campos (uno eléctrico y otro magnético) relacionando los campos mediante las ecuaciones constitutivas (aquí se dan para medios isotrópicos homogéneos lineales):

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

con lo que podemos transformar las ecuaciones de Maxwell a la forma siguiente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \ ,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ ,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \ ,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \varepsilon \mu \frac{\partial E}{\partial t} \ .$$

### 4.2 Electrostática y magnetostática

Cuando consideramos que los campos eléctrico y magnético no dependen del tiempo las ecuaciones de Maxwell se nos quedan en:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \ ,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \ ,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \ ,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \varepsilon\mu \frac{\partial E}{\partial t} \ .$$

De $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ sacamos que el campo eléctrico se deriva del gradiente de un potencial, es decir, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, como se desprende de la ley de Coulomb.

De $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ deducimos que el campo magnético es el rotacional de un potencial vector, es decir, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, obteniendo el mismo resultado que a partir de la ley de Biot-Savart.

4.3 Ecuaciones de Maxwell en el vacío

Cuando estamos en el vacío podemos suponer que no existen fuentes (es decir, que $\rho = 0$ y $\vec{J} = 0$ ) y las ecuaciones de Maxwell nos quedan de la forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \ ,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ ,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \ ,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \ ,$$

En este caso se puede demostrar que tanto el campo $\vec{E}$ como el campo $\vec{B}$ toman la forma de una ecuación de ondas con una velocidad $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = c$ igual a la velocidad de la luz, de donde Maxwell extrajo la hipótesis de que la luz no eran más que ondas electromagnéticas propagándose en el vacío, hipótesis verificada esperimentalmente por Hertz algunos años después de la muerte de Maxwell.

A partir de estas cuatro ecuaciones (dos de ellas vectoriales, con lo que en realidad son ocho ecuaciones escalares) se deduce la óptica electromagnética.

4.4 Caso general

El caso más general se obtiene cuando se consideran campos dependientes del tiempo y con fuentes tanto escalares como vectoriales. En ese caso resulta muy práctico obtener una expresión que nos exprese el campo electromagnético como derivación de potenciales.

De la ecuación $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ podemos extraer, de la teoría elemental de campos, que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Si sustituímos esto en la ecuación del rotacional del campo eléctrico obtenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ ,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{A}}{\partial t} \ ,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{A}}{\partial t} = 0 \ ,$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \ ,$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi \ ,$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \ .$$

Con lo cual ya tenemos dos expresiones que nos dan la forma de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ en función de dos potenciales $\vec{A}$ y $\phi$. Sin embargo estos potenciales presentan cierta libertad a la hora de escogerlos lo que les hace poseer una importante característica: una simetría gauge. En efecto, si tomamos un campo escalar $\lambda$ y redifinimos los potenciales como $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\lambda$ y $\phi' = \phi - \frac{\partial\lambda}{\partial t}$ obtenemos el mismo campo electromagnético (que al fin y al cabo es nuestro observable).

5 Teoremas de conservación

De las ecuaciones de Maxwell surgen de modo natural teoremas de conservación de la carga, la energía, el momento lineal y el momento angular.

La ecuación de conservación de la carga se expresa mediante:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0.$$

La ecuación de conservación de la energía toma la forma:

$$\frac{\partial u_{mec} + u_{e-m}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0,$$

donde $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ es el vector de Poynting.

La ecuación de conservación del momento lineal es:

$$\frac{\partial \vec{P}_{mec} + \vec{P}_{e-m}}{\partial t} - \vec{\nabla}\mathbf{T} = 0,$$

donde $\mathbf{T}$ es el tensor de tensiones de Maxwell con componentes

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left( E_i E_j - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ij} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} \right).$$

6 Obtención de las ecuaciones de Maxwell

Históricamente las ecuaciones de Maxwell se obtuvieron a partir de leyes empíricas que se fueron generalizando de un modo inteligente hasta llegar al conocimiento actual de la interacción electromagnética desde el punto de vista clásico. Sin embargo es posible obtener las ecuaciones de Maxwell desde un punto de vista más teórico: la teoría de la relatividad.

Podemos definir el cuadrivector potencial (se podría demostrar que éste se transforma como un cuadrivector) como:

$$\mathbf{A} = (\phi, \vec{A}),$$

y definir el tensor electromagnético como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu},$$

recorriendo los índices $\mu$, $\nu$ los índices 0 , $1$ , $2$ y $3$ y siendo $\partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$.

Con todo esto el tensor electromagnético queda de la forma

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -Bx & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos definir también el cuadrivector corriente $\mathbf{j} = (\rho, \vec{J})$ (aquí se usa el convenio según el cual los índices repetidos están sumados) de forma que las ecuaciones de Maxwell se recuperan mediante la ecuación $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu$.

7 Aplicabilidad

Las ecuaciones de Maxwell constituyen un pilar básico de la teoría electromagnética ya que por ahora se demostraron como válidas siempre. Esto es debido a que la teoría electromagnética siempre fue, sin saberlo, una teoría relativista.

De hecho, cuando se estudia desde el punto de vista cuántico estas ecuaciones sólo deben ser revisadas para tener en cuenta el carácter discreto de los fotones, pero cuando tenemos gran cantidad de ellos podemos aplicar los resultados contínuos sin ningún problema.

Fuentes consultadas en esta sección para la recopilación de texto

http://www.lawebdefisica.com/dicc/maxwell/

http://acer.forestales.upm.es/basicas/udfisica/asignaturas/fisica/magnet/ampere.html